Corso di laurea in Fisica, appello straordinario di Analisi, 11 novembre 2021
(G. Galise)

Nome: *Cognome:*

Regole: Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1-4: risposta giusta = 1, risposta omessa = 0, risposta sbagliata =-0.5. Esercizo 5: punti 0-9. Esercizo 6: punti 0-7.

Esercizio 1 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano $a_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ e $b_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente [V] [F]
2. $b_n \in (\frac{1}{2}, 1]$ per infiniti indici n [V] [F]
3. $\nexists \lim_{n\to\infty} b_n \cos(n)$ [V] [F]
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n)$ è assolutamente convergente [V] [F]

Esercizio 2 Sia data la funzione $f_\alpha(x) = e^x - \alpha x^2$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro

1. $\exists x_0$ dipendente da α tale che f_α è convessa in $(x_0, +\infty)$ [V] [F]
2. Se $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f_\alpha(x) - 1 - x}{x^2} = 0$ allora $\alpha = \frac{1}{2}$ [V] [F]
3. La funzione $\displaystyle\int_0^x f_1(t)\, dt$ è crescente in $\mathbb{R}$ [V] [F]
4. $f_2(x) = 1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$ [V] [F]

Esercizio 3 Si consideri la funzione $g(x) = x|\sin(x)|$

1. $x = 0$ è un punto di non derivabilità per g [V] [F]
2. Esiste $c \in (0, \pi)$ tale che $g'(c) = 0$ [V] [F]
3. g verifica le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ [V] [F]
4. $\sup_{x\in\mathbb{R}} g(x) = +\infty$ [V] [F]

Esercizio 4 Si consideri l'equazione differenziale $y'' - 4y' = f(t)$

1. Se $f(t) \equiv 0$ allora esistono infinite soluzioni concave in $\mathbb{R}$ [V] [F]
2. Se $f(t) \equiv 0$ allora esiste un polinomio di primo grado che è soluzione [V] [F]
3. Se $f(t) = 2t + 3$ allora $y(t) = e^{4t} - \frac{1}{4}t^2 - \frac{7}{8}t$ è soluzione [V] [F]
4. Se $f(t) = 2t + 3$ l'integrale generale è dato da $y(t) = c_1 + c_2e^{4t} - \frac{1}{4}t^2 - \frac{7}{8}t$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ [V] [F]

Esercizio 5 Data la funzione

$$f(x) = \ln\Big(|x|(x^2+1)\Big)$$

1. determinare il dominio di f e stabilire se f è pari/dispari;
2. studiare gli asintoti, continuità e derivabilità;
3. studiare punti di max, min e flessi evidenziando gli eventuali intervalli in cui la funzione f è concava/convessa;
4. disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 6 Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{\frac{1}{x+2}}}{(x+2)^3} + \sin^3(x)\,dx$$